Varianta 059

SUBIECTUL I

a) $1-7i$ .b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .c) $a=0$ şi $b=-1$.

d) Deoarece $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$, punctele $L(-1,2)$, $M(-2,3)$ şi $N(-3,4)$ sunt coliniare. e) $5\sqrt{2}$. f) $3\cdot 8=24$.

SUBIECTUL II

1.

a) $a_4=a_1\cdot q^3=-16$. b) $\frac{2}{5}$. c) $f(1)=2\Rightarrow g(2)=1$.

d) Ecuația devine $x^2+7=2^3\Rightarrow x\in\{-1,1\}$. e) Suma rădăcinilor este 0 .

2.

a) $f'(x)=3x^2-3$. b) $\int_0^1 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^1=-2$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$ sunt puncte de extrem local. Coordonatele punctelor de extrem local sunt $A(-1;12), B(1;8)$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$. e) $\frac{1}{5}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a=1\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$.

b) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}, a,x\in\mathbf{R}^*, b,y\in\mathbf{R}$. $X\cdot Y=\begin{pmatrix}ax & ay+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ pentru că $ax\in\mathbf{R}^*$, $ay+b\in\mathbf{R}$.

c) Dacă $X,Y\in H, a,b\in\mathbf{R}^*$, $X\cdot Y=\begin{pmatrix}ab & 1-ab\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$, pentru că $ab\in\mathbf{R}^*$.

d) $A\cdot B=B\cdot A=I_2$.

e) Pentru $X=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alegând $Y=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, din d), obținem

$X\cdot Y=Y\cdot X=I_2$, evident $Y\in H$.
f) Veficarea axiomelor de grup comutativ.
g) Se demonstrează prin inducție matematică că

$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 1-a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall a\in\mathbf{R}^*$ şi $\forall n\in\mathbf{N}^*$. Pentru $n=2007$ se obține

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2007}=\begin{pmatrix} a^{2007} & 1-a^{2007} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SUBIECTUL IV

a) $a_1=f(1)=\ln 2$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ este ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f.

c) Folosind proprietățile logaritmilor, avem $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln(x)$

pentru orice $x>0$.

d) $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

e) Considerăm $P(n): a_n=\ln(n+1)$.

Propoziția $P(1): a_1=\ln 2$ este adevărată. Presupunem $P(k): a_k=\ln(k+1)$ adevărată şi demonstrăm că $P(k+1): a_{k+1}=\ln(k+2)$ este adevărată. Avem

$$a_{k+1}=f(1)+f(2)+...+f(n)+f(n+1)=a_k+f(n+1)=\ln(k+1)+\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$\ln(k+1)+\ln(k+2)-\ln(k+1)=\ln(k+2).$$

Am arătat că $P(k)\Rightarrow P(k+1)$, deci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$.

g) Folosind integrarea prin părți avem

$$\int_1^2[\ln(x+1)-\ln(x)]dx=\int_1^2\ln(x+1)dx-\int_1^2\ln dx=3\ln 3-4\ln 2.$$